

# Das lokale Optimierungsproblem

Harald Heinrich, Werner Metz

## Zusammenfassung

Es erfolgt eine Darstellung der theoretischen Grundlagen, die für die Berechnung von optimal wachsenden Störungen nötig sind. Bei Anwendung des Projektionsoperators ist es möglich, die Anfangsstörung zu berechnen, welche die größtmögliche kinetische Energie nach Ablauf eines Optimierungsintervalls in einem vorher spezifizierten Gebiet erlangt. Die Berechnung dieser sogenannten lokalen optimalen Vektoren erfolgt für ein barotropes Modell, das um zeitunabhängige Grundströme linearisiert ist.

Die lokalen optimalen Vektoren sind für Grundströme ermittelt worden, die aus einem gleitenden 10-Tages Mittel bestehen. Als Zielgebiet kam dabei der Nordatlantik-Europa Bereich zur Anwendung. Auf diese Weise war es möglich, zu untersuchen, welche Gebiete einen Einfluss auf das Störungswachstum besitzen. Dabei stellte sich heraus, daß für Optimierungszeiten größer 96 Stunden vier verschiedene Startgebiete existieren. Besonderes Interesse galt dem Transport von kinetischer Energie aus diesen Startgebieten in das Zielgebiet. Teilweise zeigte sich, daß die Energie über PNA ähnliche Strukturen in das Zielgebiet getragen wird.

## Summary

Under the use of a projection operator it is possible to calculate perturbations with maximal energy growth during optimization time at some pre-chosen geographical area. The so called local optimal perturbations are computed for a barotropic model, linearized about time independent basic states.

The optimal perturbations are determined for basic states consisting of 10-day running means of the daily streamfunctions. The chosen target area was the North Atlantic-European sector. In this way it was possible to find relevant "starting regions" leading to optimal energy growth in the target area. We found four such regions for long optimization times ( $> 96$  hours). Thereby, the mechanisms responsible for the transport of the perturbations from the starting regions into the target area was thereby of special interest. In particular cases we found that structures similar to Pacific North America (PNA) patterns are involved in the energy transfer.

## 1 Einleitung

Die atmosphärischen Modelle bestehen im allgemeinen aus nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen. Die Lösungen solcher Gleichungen besitzen die Eigenschaft, daß

sie sehr empfindlich von den Anfangsbedingungen abhängen. D.h.; kleine Unterschiede in ihnen, können zu Lösungen führen, die miteinander keine Ähnlichkeiten mehr besitzen Lorenz [7]. Für diese Modelle ist es möglich, die Anfangsstörung zu berechnen, die nach Ablauf eines begrenzten Zeitintervalls (Optimierungsintervall) die größtmögliche Energie besitzt Lorenz [8], Farrell [5], Borges u. Hartmann [2], Molteni u. Palmer [11]. Diese Störungen werden als optimale Vektoren oder auch singuläre Vektoren bezeichnet. Die optimalen Vektoren lassen sich sowohl für stabile als auch für instabile Grundströme berechnen. Diese Tatsache macht sie gerade für die Anregung von atmosphärischen Anomalien interessant.

Zum einen ist es möglich, die Optimierung global, d.h. für die gesamte Atmosphäre durchzuführen. Borges und Hartmann [2] berechneten die globalen optimalen Vektoren für ein barotropes Modell. Ihr Ziel war es, zu klären, ob diese Störungen als Anregung für langperiodische Anomalien fungieren. Ein Vertreter dieser Anomalien sind die blockierenden Hochs. Sie besitzen die Eigenschaft, sich in einem festen geographischen Gebiet auszubilden und über einen längeren Zeitraum zu bestehen. Ihre Entstehungszeiten sind relativ kurz und somit scheinbar auf die optimalen Vektoren zugeschnitten. Durch nichtlineare Integration ihres Modells konnten sie die beobachteten Anomalien sehr gut nachbilden. Als Eingangsdaten dienten dabei die gemittelten Grundströme, denen sie die optimalen Störungen überlagerten. Molteni und Palmer [11] führten ebenfalls eine globale Optimierung durch. Dafür verwendeten sie ein barotropes und ein baroklines 3-Schichten Modell. Ein Vergleich der optimalen Vektoren beider Modelle ergab, daß die baroklinen Störungen für längere Optimierungsintervalle ein größeres Wachstum erfahren, da sie die barotrope und barokline Energieumwandlung nutzen. Unter der Annahme, daß der erste optimale Vektor durch ein Rossbywellenpaket darstellbar ist, beschrieb Oortwijn [12] die barotrope Ausbreitung dieses Paketes mit einer WKB Approximation. Für zonale aber auch nichtzonale Grundströme untersuchte er unter Zuhilfenahme von Erhaltungssätzen, auf welche Art und Weise Energie vom Grundstrom in Störungsenergie der optimalen Vektoren übergeht. Er konnte zeigen, daß das Störungswachstum in zwei Phasen vonstatten geht. In der Anfangsphase dominieren das Störungswachstum barokline Prozesse, nach deren Ablauf die barotrope Phase des Störungswachstums vorherrscht.

Auf der anderen Seite ist es möglich, die Anfangsstörungen zu berechnen, die in einem Teilgebiet der Atmosphäre die größtmögliche Energie erlangen. Barkmeijer [1] löste diese lokale Optimierung für ein barotropes Modell unter Verwendung des adjungierten linearisierten Modells. Dazu führte er einen Projektionsoperator ein, der es gestattet, die kinetische Energie eines Teils der Atmosphäre zu ermitteln. Ziel seiner Arbeit war die Analyse der Stabilitätsverhältnisse von sogenannten Rossby-Haurwitz Wellen (sie sind Lösungen des barotropen Modells). Für realistische Grundströme führte Buizza [3] die lokale Optimierung durch. Er verwendete ein baroklines 19-Schichten Modell und maximierte die gesamte Störungsenergie. Dazu nutzte er die sogenannte totale Energienorm Buizza et al. [4]. Für Ensemble Vorhersagen wollte Buizza die optimalen Vektoren als Anfangsbedingungen wählen. Die Nordatmosphäre kann im Sommer hinreichend stabil sein, so das bei einer globalen Optimierung Störungen, die sich auf

der Südhalbkugel befinden, dominieren. Durch diese Probleme motiviert, berechnete er die lokalen optimalen Vektoren der Nordhemisphäre. Dabei verwendete er für die Berechnung der lokalen Energie ebenfalls einen Projektionsoperator, den er, um die Symmetrie des Problems zu wahren, zweimal anwenden mußte.

Diese Zweifachanwendung des Projektors kann, bei kurzen Optimierungsintervallen, zu Ungenauigkeiten führen. Um dies zu vermeiden, stellt die vorliegende Arbeit einen Weg vor, die lokale Optimierung durch einmaliges Anwenden des Projektionsoperators unter Beibehaltung der Symmetrie zu lösen. Eine Demonstration des Verfahrens erfolgt anhand eines barotropen Modells, welches um zeitlich konstante Grundströme linearisiert ist. Als ein erstes Beispiel soll die Optimierung für die Südhalbkugel dienen. Hieran ist es möglich, die Prozesse die barotropes Störungswachstum nach sich ziehen, zu erkennen. Weiterhin erfolgt die lokale Optimierung für den Nordatlantik-Europa Bereich. Um zu testen, welche Ursprungsgebiete für das Störungswachstum einen Einfluß auf dieses Zielgebiet besitzen, kamen Grundströme, welche eine Mittelung über 10-Tages Intervalle erfuhren, zum Einsatz. Gerade die Mechanismen, die für den Transport von Störungsamplitude in des Optimierungsgebiet verantwortlich sind, waren von besonderem Interesse. Dabei spielt das Vermögen der optimalen Vektoren, langperiodische Anomalien anzuregen, ebenfalls eine große Rolle.

Die Arbeit ist folgendermaßen gegliedert. In Abschnitt 2 werden die verwendeten Daten vorgestellt. Abschnitt 3 geht auf das barotrope Modell und die theoretischen Grundlagen ein. Abschnitt 4 stellt die Ergebnisse vor, für die schließlich in Abschnitt 5 eine Diskussion erfolgen soll.

## 2 Daten

Für die Untersuchungen im zweiten Teil, standen die Stromfunktionen 300 hPa für sechs Nordwinter zur Verfügung. Jeder Winter besteht aus 110 Tagen der täglichen 00 UTC Analysen. Starttag ist jeweils der 20. November. Die Daten, die die Periode von 1979/80 bis 1985/86 umfassen, stammen vom European Centre for Medium Range Weather Forecast (ECMWF). Sie sind nach Kugelflächenfunktionen entwickelt. Die dabei verwendete Dreiecksabhackung bei einer Gesamtwellenzahl von 21 (T21) entspricht einer horizontalen Auflösung von ca.  $5.6^\circ \times 5.6^\circ$  auf einem Gaußgitter.

Für den klimatologischen Grundstrom aus Abschnitt 4.1 erfolgt die Mittelung der täglichen Stromfunktionen über die gesamten sechs Winterjahre. In Abschnitt 4.2 erfolgt die Berechnung der lokalen optimalen Vektoren für sogenannte niederfrequente Grundströme. Sie resultieren aus 10-Tägiger Mittelung der Stromfunktionen. Da es vorher nicht bekannt war, welche Grundströme sich gegenüber anderen auszeichnen, kam ein gleitendes Mittel zum Einsatz. Daraus entstehen pro Winter ca. 90 Grundströme, für die das Optimierungsproblem gelöst wurde.

## 3 Modell und Methode

### 3.1 Modell

Das hier verwendete barotrope Modell ist ein globales spektrales Modell. Für die dabei auftretenden Approximationen der Geschwindigkeitsfelder mittels Kugelflächenfunktionen kommt eine T21 Abhackung zum Einsatz. Die divergenzfreie barotrope Vorticitygleichung besitzt folgende Gestalt

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{v} (\zeta + f) - \alpha \zeta - \gamma \nabla^4 \zeta \quad (1)$$

wobei  $\zeta$  die relative Vorticity,  $\mathbf{v} = (u, v)$  der horizontale Geschwindigkeitsvektor,  $f$  der Coriolis-Parameter,  $\alpha$  der lineare Reibungs- und  $\gamma$  der Diffusionskoeffizient sind. Als Standardwerte für die 300 hPa Druckfläche kommen  $\alpha = 1/7 \text{ Tag}^{-1}$  und  $\gamma = 2.239 \cdot 10^{16} \text{ m}^4 \text{ s}^{-1}$  zur Anwendung. Die divergenzfreie Windgeschwindigkeit erhält man aus  $\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \nabla \psi$ ,  $\psi$  wird als Stromfunktion bezeichnet. Aus ihr läßt sich die Vorticity berechnen, es gilt

$$\zeta = \nabla^2 \psi \quad (2)$$

Nach Linearisierung und Diskretisierung Metz [10] erhält man folgendes 480 dimensionale lineare Differentialgleichungssystem

$$\frac{d\mathbf{\Psi}}{dt} = \mathbf{A}(\bar{\psi}) \mathbf{\Psi} \quad (3)$$

mit dem reellen Vektor  $\mathbf{\Psi}$ , in dem die Kugelfunktionskoeffizienten der Störungsstromfunktion  $\psi'$  (abwechselnd Real- und Imaginärteile) angeordnet sind, und der reellen  $(480 \times 480)$ -Matrix  $\mathbf{A}$ , welche von dem Grundstrom  $\bar{\psi}$  abhängt.

### 3.2 Theorie

Die barotrope Vorticitygleichung läßt sich im allgemeinen folgendermaßen darstellen

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = F(\zeta) \quad (4)$$

wobei  $F(\zeta)$  eine nichtlineare differenzierbare Funktion ist. Linearisierung dieser Gleichung, d.h. die Vorticity wird in einen Grundzustand und eine Abweichung davon zerlegt  $\zeta = \bar{\zeta} + \zeta'$ , ergibt eine Gleichung die die Entwicklung einer kleinen Störgröße  $\zeta'$  beschreibt.

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} = A \zeta' \quad (5)$$

$A$  stellt hierbei einen linearen Differentialoperator dar. Aus der Linearität von (5) folgt, daß mit  $\psi$  und  $\phi$  auch  $\alpha\psi + \beta\phi \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{C}$  Lösungen sind.  $\zeta'$  kann man als Vektor in einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  auffassen. Da im barotropen Fall Lösungen auf einer

Kugelschale gesucht werden, besitzt  $\mathcal{H}$  folgende Gestalt:  $\mathcal{H} = L^2(\Omega, d^2x) = L^2([0, 2\pi] \times [-1, 1], d\mu d\lambda)$  (Raum der Quadratintegrierbaren Funktionen auf der Sphäre) mit dem zugrundeliegendem Skalarprodukt

$$\{ \psi, \phi \} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \psi^* \phi d\mu d\lambda \quad (6)$$

$\forall \psi, \phi \in \mathcal{H}$  und der damit assoziierten Norm

$$\| \psi \|^2 = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \psi^* \psi d\mu d\lambda \quad (7)$$

Der hochgestellte Stern bedeutet konjugiert komplex,  $\lambda$  ist die Länge und  $\mu$  ist der Sinus der Breite. Die Basis von  $\mathcal{H}$  stellen Kugelflächenfunktionen dar. Sie besitzen die folgende Gestalt

$$Y_{m,n}(\mu, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} P_{m,n}(\mu) e^{im\lambda} \quad (8)$$

mit der Orthogonalitätsrelation

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 Y_{m,n} Y_{m',n'}^* d\mu d\lambda = \delta_{m,m'} \delta_{n,n'} \quad (9)$$

wobei  $\delta_{x,y}$  die Deltadistribution ist. Für jeden beliebigen Vektor  $\psi \in \mathcal{H}$  gilt

$$\psi(\mu, \lambda, t) = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \psi_{m,n}(t) Y_{m,n}(\mu, \lambda) \quad (10)$$

Die Störungsvorticity  $\zeta'$  ist über  $\zeta' = \nabla^2 \psi$  mit der Störungsstromfunktion  $\psi$  verknüpft. Mit  $\psi$  und dem Skalarprodukt (6) läßt sich die kinetische Energie einer Störgröße folgendermaßen berechnen [13]

$$E_{kin} = \{ \psi, -\nabla^2 \psi \} \quad (11)$$

Der Laplaceoperator wird hierbei in Kugelkoordinaten (ohne r-Abhängigkeit) verwendet. Der Operator  $-\nabla^2$  ist bezüglich diesem SKP selbstadjungiert (siehe Anhang 1). Das ist sinnvoll, da die kinetische Energie eine reelle Größe sein muß.

Mit Hilfe eines Projektionsoperators  $\hat{T}_g$  läßt sich die kinetische Energie eines Teilgebietes  $g \subset \Omega$  berechnen.  $\hat{T}_g$  ist folgendermaßen definiert

$$\hat{T}_g \psi(\mu, \lambda, t) = \chi(\mu, \lambda) \psi(\mu, \lambda, t) \quad (12)$$

wobei

$$\chi(\mu, \lambda) = \begin{cases} 1 & (\mu, \lambda) \in g \\ 0 & (\mu, \lambda) \notin g \end{cases} \quad (13)$$

Mehrfachanwendung des Projektionsoperators ändert nicht das Resultat, d.h. es gilt:  $\hat{T}_g^2 = \hat{T}_g \hat{T}_g = \hat{T}_g$ . Für die kinetische Energie folgt nun unter Anwendung von  $\hat{T}_g$

$$E_{kin}^g = - \int \int_g \psi^* \nabla^2 \psi \, d\mu \, d\lambda = - \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \psi^* \hat{T}_g \nabla^2 \psi \, d\mu \, d\lambda = - \{ \psi, \hat{T}_g \nabla^2 \psi \} \quad (14)$$

Wie man hieraus erkennen kann, ist der Projektionsoperator  $\hat{T}_g$  ebenfalls selbstadjungiert.

Um nun die kinetische Energie  $E_{kin}^g$  eines Gebietes  $g \subset \Omega$  zu maximieren, ist es nützlich, die Gleichung (14) unter Einführung der Energiematrix  $\mathbf{D}$  umzuformen. Aus den Gleichungen (9), (10) und der Tatsache, daß Kugelflächenfunktionen Eigenfunktionen des Laplaceoperators sind, findet man

$$E_{kin} = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N n(n+1) |\psi_{m,n}|^2 = \langle \Psi, \mathbf{D} \Psi \rangle \quad (15)$$

Hierbei bedeutet  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \sum_{i=1}^k x_i y_i$  das reelle Euklidische Skalarprodukt (  $(..)^T$  steht für transponieren),  $\mathbf{D}$  ist eine reelle Diagonalmatrix mit den Eigenwerten des Laplaceoperators auf der Diagonalen, und  $\Psi$  ist ein reeller Vektor, dessen Komponenten die Koeffizienten  $\psi_{m,n}(t)$  der Entwicklung (10) enthält. Eine genauere Beschreibung dieser Prozedur befindet sich bei Heinrich [6]. Es zeigt sich später, daß es von Vorteil ist, die Energiematrix folgendermaßen darzustellen:  $\mathbf{D} = \mathbf{D}^{1/2} \mathbf{D}^{1/2}$ , wobei  $\mathbf{D}^{1/2}$  als Diagonalmatrix, die die Wurzel der Diagonalelemente von  $\mathbf{D}$  enthält, definiert ist. Unter Ausnutzung der Selbstadjungiertheit von  $\mathbf{D}^{1/2}$  und Anwendung des Projektionsoperators findet man für die kinetische Energie eines Teilgebietes  $g$

$$E_{kin}^g = \langle \mathbf{D}^{1/2} \Psi, \mathbf{T}_g \mathbf{D}^{1/2} \Psi \rangle \quad (16)$$

Da man es hierbei mit dem Euklidischen Skalarprodukt zu tun hat, folgt für den Projektionsoperator eine etwas kompliziertere Gestalt. Es ist aber möglich, ihn durch eine symmetrische Matrix  $\mathbf{T}_g$  zu repräsentieren (siehe Anhang 2).

### 3.3 Optimierung für ein lokales Gebiet

Gesucht ist die Anfangsstörung  $\Psi(t_0) = \Psi_0$ , die nach Ablauf einer zeitlichen Entwicklung (im voraus festgelegtes Optimierungsintervall  $T_{opt}$ ) die größtmögliche kinetische Energie in einem vorher definierten Gebiet  $g \subset \Omega$  erlangt. D.h., es gilt

$$E_{kin}^g(t_0 + T_{opt}) = \text{Max!} \quad (17)$$

für  $\Psi_0 = \Psi_{opt}$  dem ersten lokalen optimalen Vektor unter der Nebenbedingung

$$E_{kin}(t_0) = \langle \Psi_0, \mathbf{D} \Psi_0 \rangle = 1 \quad (18)$$

Es wird hier  $E_{kin}(t_0)$  und nicht  $E_{kin}^g(t_0)$  verwendet, da die Anfangsstörung  $\Psi_{opt}$  nicht ausschließlich in  $g \subset \Omega$  liegen muß. Es ist vielmehr ja denkbar, daß sich die Störung im Zuge ihrer zeitlichen Entwicklung in das Zielgebiet hinein bewegt.

Die Lösung von Gleichung (3) läßt sich folgendermaßen darstellen

$$\Psi(t) = \mathbf{P}(t, t_0) \Psi(t_0) \quad (19)$$

mit dem Propagator  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t, t_0)$  und der Anfangsbedingung  $\Psi(t_0) = \Psi_0$ . Die Frage nach dem Auffinden des optimalen Vektors  $\Psi_{opt}$  ist folgendem Eigenwertproblem äquivalent

$$[\mathbf{P}^T \mathbf{D}^{1/2} \mathbf{T}_g \mathbf{D}^{1/2} \mathbf{P} - \lambda_i \mathbf{D}] \Psi_{0_i} = 0 \quad (20)$$

Die Eigenwerte  $\lambda_i$  sind die optimalen Werte, sie lassen sich ihrer Größe nach ordnen; d.h.:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \quad (21)$$

Sie repräsentieren das Verhältnis aus kinetischer Störungsenergie nach Ablauf des Optimierungsintervalles  $t = t_0 + T_{opt}$  zu kinetischer Störungsenergie zum Zeitpunkt  $t = t_0$ . Der erste optimale Vektor  $\Psi_{opt}$  ist der zum größten Eigenwert  $\lambda_1$  gehörige Eigenvektor. Er besitzt nach Ablauf des Optimierungsintervalls die größte kinetische Energie im Gebiet  $g \subset \Omega$ .

Für die Lösung der Eigenwertgleichung (20) kommt ein Lanczos Algorithmus zum Einsatz Buizza et al. [4]. Diese Methode besitzt den Vorteil, daß die einzelnen Matrixelemente nicht explizit bekannt sein müssen. Es genügt das Wissen über die Wirkung der Matrix auf beliebige Vektoren.

## 4 Ergebnisse

### 4.1 Optimale Vektoren der Südhalbkugel

Als Optimierungsgebiet soll als erstes einmal die gesamte Südhalbkugel dienen. Die lokale Optimierung ist notwendig, da im Nordwinter Störungen, die sich ausschließlich auf der Nordhalbkugel befinden, dominieren. Es kommt der in Abschnitt 2 beschriebene klimatologische Grundstrom zur Anwendung. Er besteht aus einem 6-jährigen Mittel der 300 hPa Winterstromfunktionen (Dezember, Januar, Februar). Die Strömung der Südhalbkugel ist in Abbildung 1a in polarer stereographischer Projektion dargestellt. Wie man sehen kann, besitzt sie einen sehr stark zonalen Charakter. Bei genauerem Betrachten ist erkennbar, daß die Isolinien im Bereich 30 Grad westliche bis 150 Grad östliche Länge stärker gedrängt sind als im übrigen Gebiet.

Beispielhaft für die zeitliche Entwicklung ist in Abbildung 2 der erste optimale Vektor für das Optimierungsintervall 48 Stunden dargestellt. Seine Ausgangslage zum Zeitpunkt  $t = t_0$  (Abbildung 2a) befindet sich nördlich des Grundstrombereichs, in dem auch die Isoliniendrängung am größten ist. Im Laufe seiner zeitlichen Entwicklung (Abbildungen 2b-d) bewegt er sich nach Osten, wobei er sich gleichzeitig nach Süden

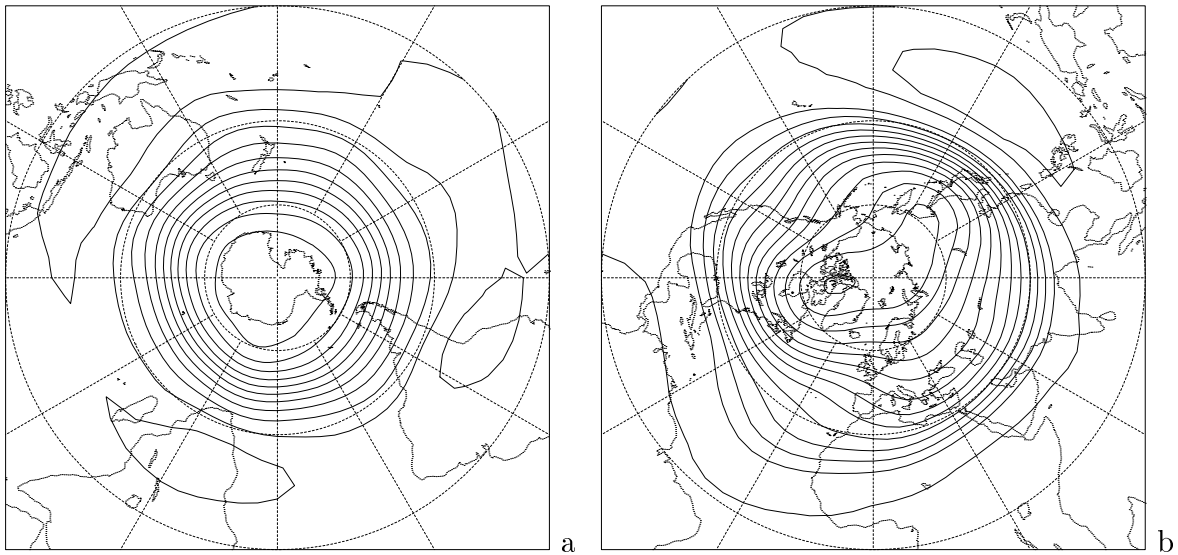


Abbildung 1: Klimatologischer Grundstrom (D,J,F) 300 hPa Stromfunktion in polarer stereographischer Projektion der (a) Südhalbkugel und (b) Nordhalbkugel. Das Zeichnungsintervall beträgt  $10 \times 10^6 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , positive sowie negative Werte sind mit durchgezogenen Linien dargestellt.

verlagert. Nach 48 Stunden (Abbildung 2c) befindet sich der größte Teil seiner Amplitude in dem Gebiet, in dem auch der Stromfunktionsgradient des Grundstromes am stärksten ist.

Sehr schön sind an diesem Beispiel die Mechanismen zu erkennen, die das Störungswachstum verursachen. Zum einen muß die Störung, um maximal kinetische Energie dem Grundstrom entnehmen zu können, durch das Gebiet größter kinetischer Energie laufen. Zum anderen, kann man sehr schön feststellen, daß die Neigung der einzelnen Strukturen mit der Entwicklungszeit zunimmt. Zum Zeitpunkt  $t = t_0$  liegt die Störung fast parallel zur Grundstromachse, nach 48 Stunden stehen sie senkrecht und nach 96 Stunden ist ein Durchknicken einzelner Strukturen zu beobachten. Durch Änderung der Neigung ist es für die Störungen möglich, kinetische Energie zu gewinnen (U. Harlander, persönliches Gespräch). Das Durchknicken in die entgegengesetzte Richtung nach 96 Stunden ist ein Anzeichen dafür, daß die Störungen Energie verlieren; d.h., es geht Störungsenergie in Grundstromenergie über. Die beiden oben beschriebenen Mechanismen führen zu Amplitudenwachstum und einer damit verbundenen Verstärkung der Störungsstromfunktionsgradienten, die proportional zur kinetischen Energie sind.

Wie aus einer EOF-Analyse (Empirische Orthogonal Funktionen) der Südhemisphäre hervorgeht, besteht eine beachtenswerte Ähnlichkeit zwischen dem optimalen Vektor zum Optimierungszeitpunkt (Abbildung 2c) und der zweiten EOF. Dies trifft auf die Lage und die Skala gleichermaßen zu. Beide Strukturen besitzen ca. die zonale Wellenzahl 6, wobei die Wellenberge und Täler fast in Phase liegen. D.h.; in der



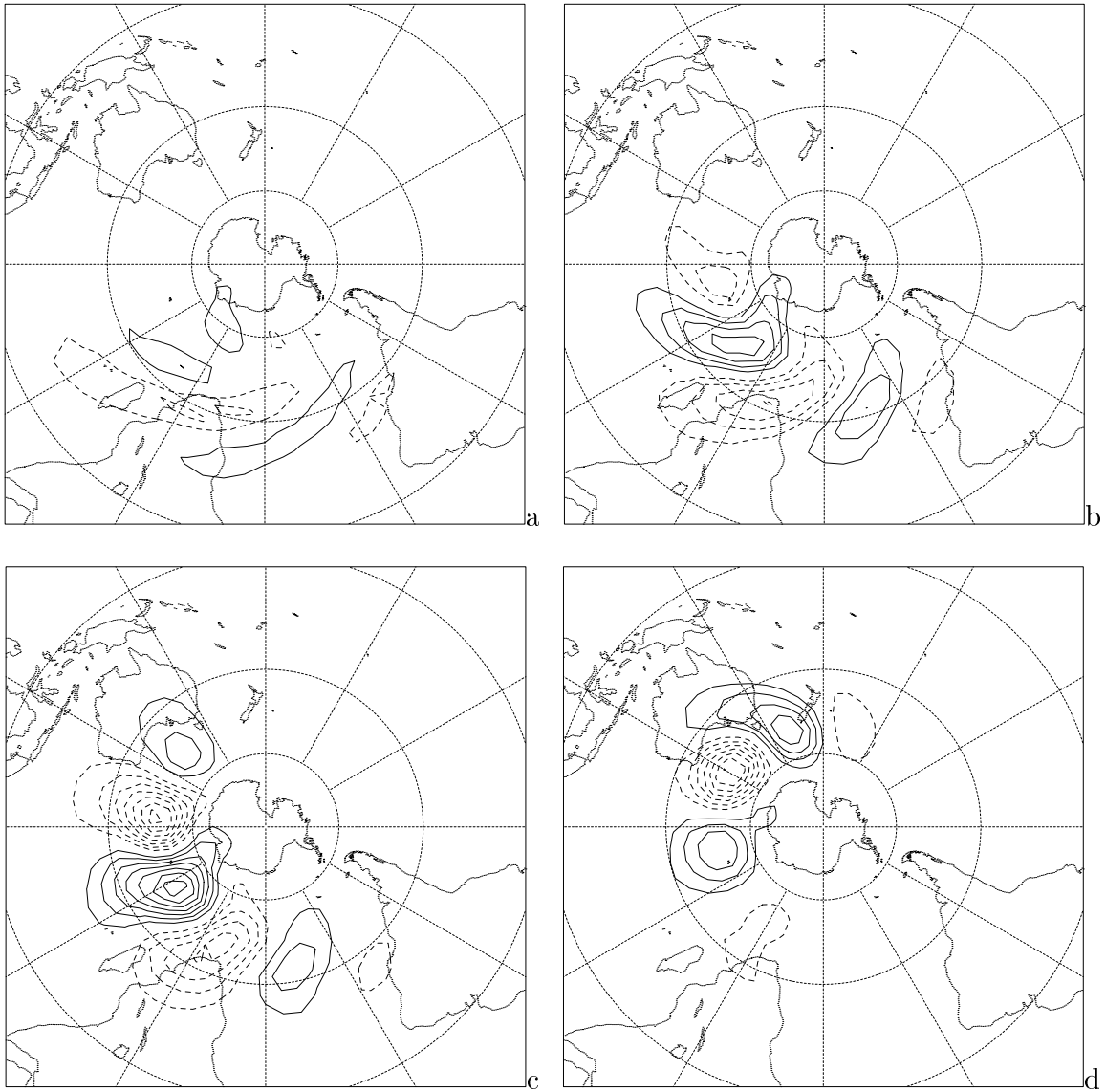


Abbildung 2: erster optimaler Vektor der Südhalbkugel für 48 Stunden (a) zum Zeitpunkt  $t = t_0$ , (b) nach 24 Stunden, (c) nach 48 Stunden und (d) nach 96 Stunden Entwicklung. Das Zeichnungsintervall beträgt  $3 \times 10^5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ .

Umgebung der Wellenpaketzentren besteht eine größere Übereinstimmung als an den Rändern. Der Hauptunterschied zwischen dem optimalen Vektor und der zweiten EOF besteht in der genau entgegengesetzten Neigung der Strukturen. Die EOF's, die mit den wandernden synoptikskaligen Störungen (Hoch- und Tiefdruckgebiete der mittleren Breiten) in Verbindung gebracht werden, speisen Energie in den Grundstrom. Entgegengesetzt dazu, nehmen die optimalen Vektoren kinetische Energie des Grundstroms auf. Es wäre denkbar, daß die physikalischen Prozesse die für die Ausbildung

der EOF Muster verantwortlich sind, ebenfalls bei den optimalen Vektoren eine Rolle spielen. Anders herum, erklären die optimalen Vektoren einen großen Teil der Varianz des zugrundeliegenden Grundstromes und könnten damit die Lage der EOF Muster vorgeben.

## 4.2 Der Atlantik-Europa Bereich

Nachfolgend soll der Einfluß auf das Störungswachstum im Nordatlantik-Europa Bereich aus anderen Gebieten untersucht werden. Dazu erfolgt die Berechnung der lokalen optimalen Vektoren für dieses Gebiet (47 Grad West bis 22 Grad Ost; 34 bis 90 Grad Nord). Als Daten stehen die täglichen Winterstromfunktionen (Dezember, Januar, Februar) in dem Zeitraum 1979 bis 1985 zur Verfügung. Für das Mittelungsschema kommt ein gleitendes 10-Tages Mittel zur Anwendung (siehe Abschnitt 2), welches über die vorhandenen Winterdaten geschoben wird. Pro Winter entstehen somit ca. 90 Grundströme.

Als Optimierungsintervall für die lokalen optimalen Vektoren kommt zunächst einmal  $T_{opt} = 48$  Stunden zum Einsatz. Um einen Eindruck über die Start- und Zielgebiete zu erlangen, erfolgt die Transformation der optimalen Vektoren in den Gitterpunktraum. Hier findet eine Überprüfung der einzelnen Gitterpunktwerte statt. Bei Überschreitung eines vorher definierten Schwellenwertes wird in einem zweiten Gitter, der Häufigkeitsverteilung, an dieser Stelle eine eins addiert. Abbildung 3a zeigt die Häufig-

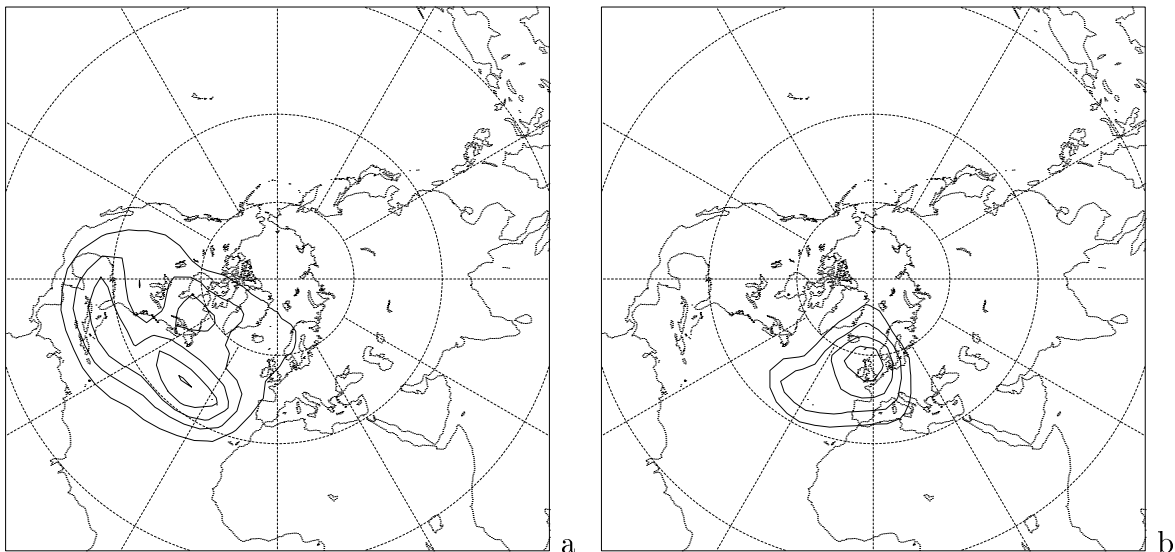


Abbildung 3: Häufigkeitsverteilungen der lokalen ersten optimalen Vektoren für  $T_{opt} = 48$  Stunden zum Zeitpunkt (a)  $t = t_0$  und (b)  $t = T_{opt}$ . Das Zeichnungsintervall beträgt 70.

keitsverteilung der optimalen Vektoren zum Zeitpunkt  $t = t_0$ . Aus einem Vergleich mit dem klimatologischen Grundstrom (Abbildung 1b) geht hervor, daß sie in der Region zu finden sind, in der im Mittel auch der Atlantikjet liegt. Die Verhältnisse nach Ablauf des Optimierungsintervalles sind in Abbildung 3b gezeigt. Wie nicht anders zu erwarten, liegen die optimalen Vektoren jetzt in dem Gebiet, für welches sie optimiert sind.

Vergrößert man das Optimierungsintervall auf  $T_{opt} = 192$  Stunden, können vier Startgebiete identifiziert werden (Abbildung 4a). Zwei davon liegen im Atlantikjetbereich und die anderen zwei im Asiatischen Subtropenjetbereich, wobei die Gebiete bezüglich der klimatologischen Jetachsen jeweils nach Süden bzw. nach Norden verschoben sind (vergleiche mit Abbildung 1b). Nach Ablauf der 192 Stunden ist die Häufigkeitsverteilung in Abbildung 4b dargestellt. Sie zeigt große Ähnlichkeit mit der Verteilung für das 48-stündige Optimierungsintervall (Abbildung 3b).

Um die kinetische Störungsenergie im Atlantik-Europa Raum zu maximieren, wird für das Optimierungsintervall 192 Stunden neben dem Atlantikjet auch der Asiatische Subtropenjet genutzt. Die optimalen Störungen verwenden die Jet's zur Energieaufnahme und als Ausbreitungsmedium. Sie müssen dann, während ihrer zeitlichen Entwicklung, diese Energie in das Zielgebiet transportieren. Dieses Verhalten ist einmal in Abbildung 5 dargestellt. Sie zeigt den ersten lokalen optimalen Vektor für das Optimierungsintervall  $T_{opt} = 192$  Stunden samt seiner zeitlichen Entwicklung. Der zugrundeliegende Grundstrom besteht aus einem 10-tages Mittel der täglichen Strom-

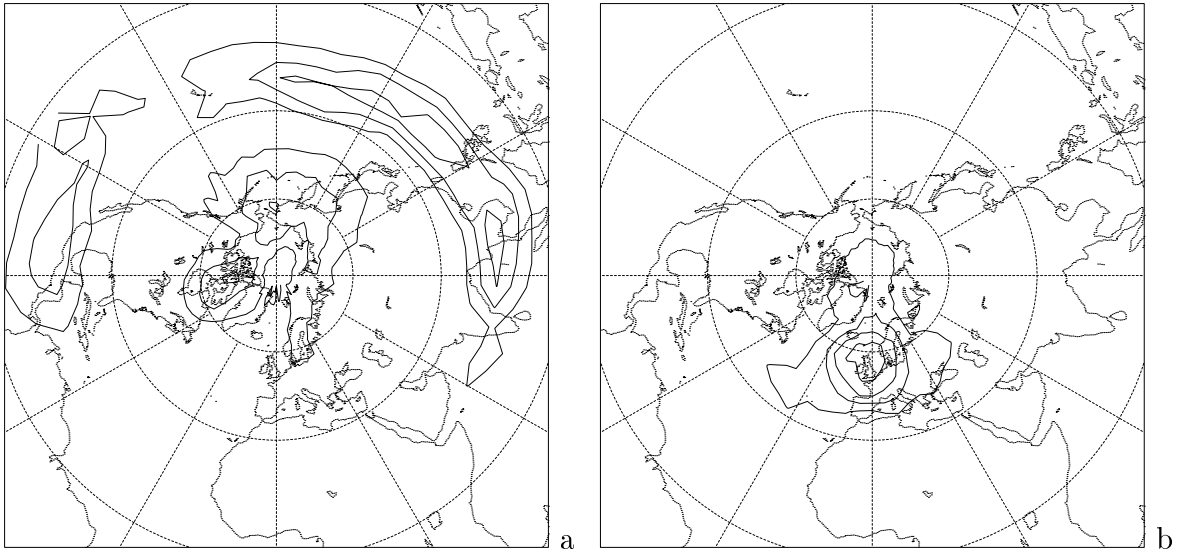


Abbildung 4: Häufigkeitsverteilungen der lokalen ersten optimalen Vektoren für  $T_{opt} = 192$  Stunden zum Zeitpunkt (a)  $t = t_0$  und (b)  $t = T_{opt}$ . Das Zeichnungsintervall beträgt 70.

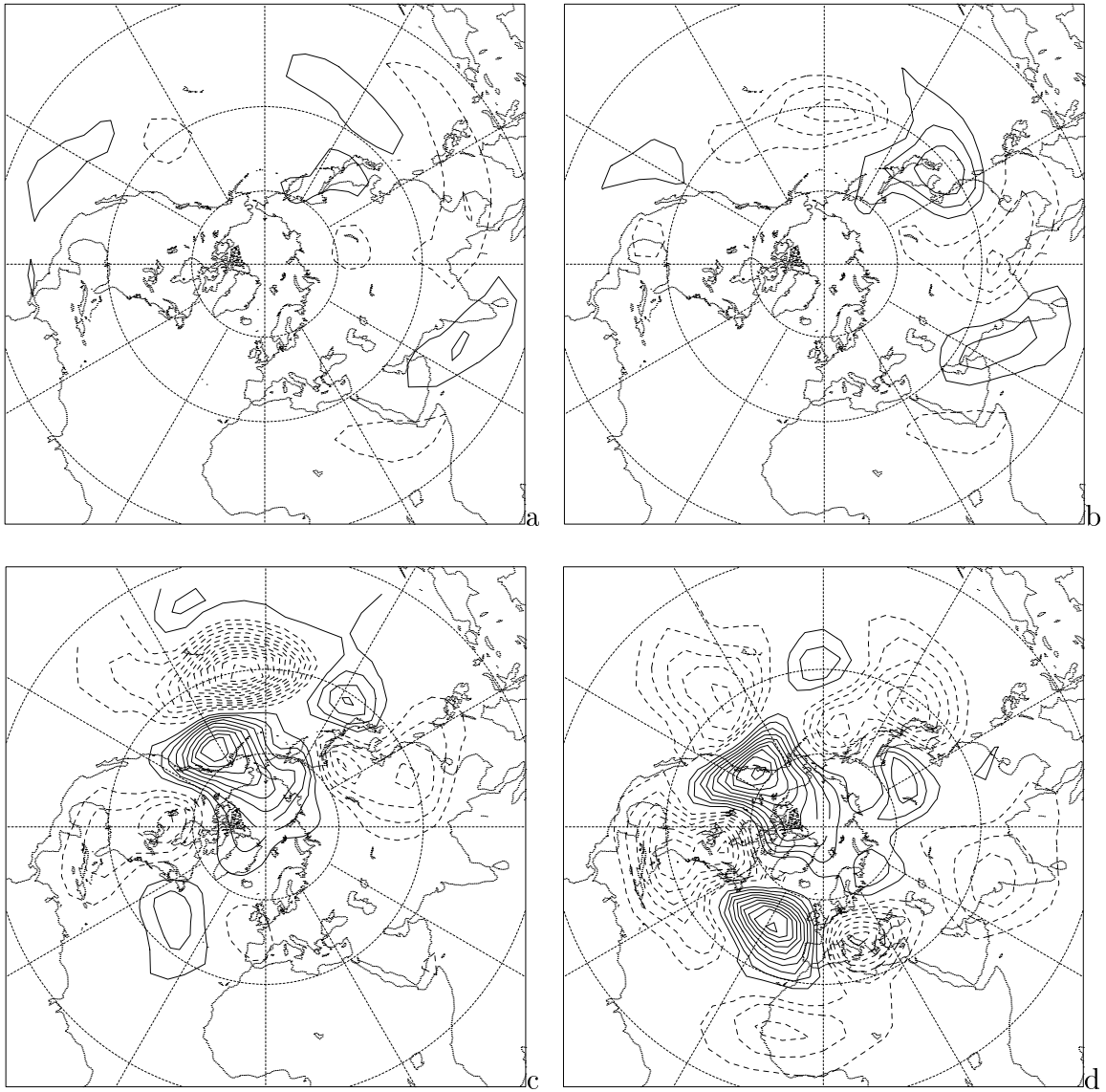


Abbildung 5: Erster lokaler optimaler Vektor des Nordatlantik-Europa Bereichs für den Grundstrom 21.01.84 bis 30.01.84 für 192 Stunden (a) zum Zeitpunkt  $t = t_0$ , (b) nach 24 Stunden, (c) nach 96 Stunden und (d) nach 192 Stunden Entwicklung. Das Zeichnungsintervall ist in allen vier Grafiken unterschiedlich.

funktionen. Starttag für die Mittelungsperiode ist der 21.01.84. In diesem speziellen Beispiel kann man erkennen, daß der Hauptteil der Amplituden in der Mündungsregion des Asiatischen Subtropenjets liegt (Abbildung 5a). Während ihrer zeitlichen Entwicklung, läuft die Störung durch den Jet und gewinnt dabei kinetische Energie. Nach 96 Stunden Integration kommt es zum Energietransfer in den Atlantik-Europa Bereich. Dabei wird eine Struktur aufgebaut, die Ähnlichkeit mit einem Pazifik-Nordamerika (PNA) Muster besitzt (Abbildung 5c). Nach 192 Stunden befindet sich schließlich ein

Teil der Störungsamplitude im Zielgebiet. Wie man in Abbildung 5d erkennen kann, ist auch noch in anderen Gebieten Störungsamplitude vorhanden. Die lokale Optimierung schließt Störungen außerhalb des Zielgebietes nicht aus. Der Anteil, welcher sich im Nordatlantik-Europa Bereich befindet, repräsentiert die maximal mögliche kinetische Energie. Mehr ist für dieses Gebiet, unter dem verwendeten Grundstrom und Optimierungszeit, nicht erreichbar.

Zum Schluß soll noch darauf hingewiesen werden, daß das gerade besprochene keine universelle Gültigkeit besitzt. D.h., es soll nicht bedeuten, daß ausschließlich PNA ähnliche Muster die kinetische Energie vom Pazifik in den Atlantik transportieren. Es erfolgte vielmehr die Beobachtung verschiedenster Prozesse, die alle davon abhängen welche Gestalt der zugrundeliegende Grundstrom besitzt. Je nach Grundstrom, kommt es zu einer Bevorzugung des einen oder anderen von den vier möglichen Startgebieten. Zum Beispiel, dominieren bei einem stark ausgeprägten Atlantikjet Störungen, die sich in dieser Region befinden. Sie wandern dann auf direktem Weg in das Zielgebiet hinein. Dabei durchlaufen sie die oben beschriebenen Prozesse für barotropes Störungswachstum. Anders verhält es sich bei der Anwesenheit von Blockierenden Hochs über dem Atlantik. Hier dominieren ortsfeste Strukturen in diesem Bereich, die nach Ablauf des Optimierungsintervalls große Ähnlichkeit mit der von Metz [9] berechneten Blocking-Anomalie besitzen.

## 5 Diskussion und Schlußfolgerung

Interessant ist die Ähnlichkeit von EOF's und optimalen Vektoren auf der Südhalbkugel. Dies ist um so erstaunlicher, da die optimalen Vektoren nur für ein barotropes Modell berechnet worden. Damit können sie natürlich nur den barotropen Anteil des Störungswachstums widerspiegeln. Sie geben Auskunft über theoretisch mögliches Störungswachstum. Die EOF's dagegen stellen Beobachtungswerte, in Form von Varianzmustern, über die wandernden Hoch- und Tiefdruckgebiete dar. Für sie sind barokline Prozesse dominant. Um die Frage zu verfolgen, woher die Gemeinsamkeiten in Gestalt und Lage zwischen den EOF Mustern und den optimalen Vektoren herrühren, sind weitere Untersuchungen nötig. Nützlich dafür ist wahrscheinlich die Berechnung von baroklinen optimalen Vektoren für die Südhalbkugel.

Weiterhin kam der Nordatlantik-Europa Raum als Optimierungsgebiet zum Einsatz. Hier sind die unterschiedlichsten Grundströme mittels lokaler optimaler Vektoren untersucht worden. Aus der Art der Optimierung ergibt sich, daß die Anfangsstörungen nicht im Zielgebiet liegen müssen. Auf diese Weise können die optimalen Vektoren als Energiequelle neben dem Atlantikjet auch den Asiatischen Subtropenjet für ihr Störungswachstum nutzen. Dieser Sachverhalt trifft aber nur für lange Optimierungszeiten zu. Für Zeiten kleiner 192 Stunden befinden sich die Anfangsstörungen hauptsächlich in der Atlantikjetregion, da es innerhalb dieser kurzen Intervalle nicht möglich ist, die Energie vom pazifischen- in den atlantischen Bereich zu transportieren.

Aus der Art und Weise, wie die Störungen in das Zielgebiet wandern, ist zu er-

kennen, welche Gebiete miteinander in Wechselwirkung stehen. Teleconnections zeigen solche Fernwirkungen an, Wallace u. Gutzler [14]. Ihre Berechnung erfolgt über statistische Methoden. Ein Vertreter dieser Strukturen ist das sogenannte PNA Muster. Es repräsentiert die Wechselwirkung zwischen Pazifik und Nordamerika auf der Nordhalbkugel. Dabei handelt es sich um eine ortsfeste niederfrequente Oszillation der Atmosphäre.

Bei ihrer Wanderung in den Nordatlantik-Europa Raum kann es vorkommen, daß die optimalen Vektoren PNA ähnliche Muster anregen oder solche Strukturen nutzen, um die kinetische Energie in das Zielgebiet zu transportieren. Dieses Verhalten wird dabei maßgeblich vom zugrundeliegenden Grundstrom bestimmt. Neben diesem PNA Transport konnten die unterschiedlichsten Mechanismen beobachtet werden. Dabei hat es den Anschein, daß die Strukturen, die sich im pazifischen Raum entwickeln, als Auslöser für die Atlantik-Strukturen fungieren.

Die Frage des Einflusses des jeweiligen Grundstromes auf den Energietransport ist noch genauer zu untersuchen. Da hinein spielt auch die Frage welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit solch ein PNA Muster angeregt wird. Auch die anderen Transportmechanismen sollten eine genauere Prüfung erfahren. Vielleicht lassen sich in ihnen Gemeinsamkeiten erkennen, die auf andere Wechselwirkungen zurückzuführen sind.

## 6 Anhang

### 6.1 Selbstadjungiertheit des Laplaceoperators

Aus der Struktur des Laplaceoperators in Kugelkoordinaten und der Gestalt der Kugelflächenfunktionen folgt  $\nabla^2 Y_{m,n}(\mu, \lambda) = \nabla^2 Y_{m,n}^*(\mu, \lambda)$  und damit  $\nabla^2 \psi(\mu, \lambda, t) = \nabla^2 \psi^*(\mu, \lambda, t)$ , woraus die Selbstadjungiertheit von  $\nabla^2$  folgt, d.h.:  $\{\psi, \nabla^2 \psi\} = \{\nabla^2 \psi, \psi\}$ . Daraus folgt weiterhin, daß die kinetische Energie reell ist

$$E_{kin} = -\{\psi, \nabla^2 \psi\} = -\{\nabla^2 \psi, \psi\}^* = -\{\psi, \nabla^2 \psi\}^* = E_{kin}^*$$

### 6.2 Projektionsoperator

Bei Verwendung des Euklidischen Skalarproduktes ergibt sich für den Projektionsoperator folgende Matrixdarstellung Buizza [3]

$$\mathbf{T}_g = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{S}$$

wobei die Matrizen auf der rechten Seite folgende Bedeutung besitzen:

1.  $\mathbf{S}$  führt die Transformation Spektral  $\rightarrow$  Gitter durch, d.h.: der k-dimensionale Vektor  $\Psi$  wird in den l-dimensionalen Vektor  $\Psi_g$  überführt. k ist dabei die Anzahl der Kugelfunktionskoeffizienten und l die Anzahl der Gitterpunktwerte.  $\mathbf{S}$  ist eine lineare Abbildung vom  $\mathcal{R}^k$  in den  $\mathcal{R}^l$ , sie wird durch eine  $(l \times k)$ -Matrix repräsentiert.

2.  $\mathbf{G}$  legt das Zielgebiet  $g$  auf dem Gitter fest, d.h.:

$$\mathbf{G}\Psi_g = \begin{cases} \Psi_g(\mu_i, \lambda_j) & (\mu_i, \lambda_j) \in g \\ 0 & (\mu_i, \lambda_j) \notin g \end{cases}$$

Dieser Operator wird durch eine  $(l \times l)$ -Diagonalmatrix repräsentiert.

3.  $\mathbf{S}^{-1}$  führt die Rücktransformation Gitter  $\rightarrow$  Spektral durch, welche durch eine  $(k \times l)$ -Matrix dargestellt wird.

## Literatur

- [1] J. Barkmeijer. Local error growth in a barotropic model. *Tellus* 44A, 314-323, 1992.
- [2] M. D. Borges and D. L. Hartmann. Barotropic instability and optimal perturbations of observed nonzonal flows. *J. Atmos. Sci.* 49, 335-354, 1992.
- [3] R. Buizza. Localization of optimal perturbations using a projection operator. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 120, 1647-1681, 1994.
- [4] R. Buizza, J. Tribbia, F. Molteni, and T. Palmer. Computation of optimal unstable structures for a numerical weather prediction model. *Tellus* 45A, 388-407, 1993.
- [5] B. Farrell. Optimal excitation of neutral rossby waves. *J. Atmos. Sci.* 45, 163-172, 1988.
- [6] H. Heinrich. Optimal wachsende Störungen in einem barotropen Modell. *Diplomarbeit am Institut fuer Meteorologie der Universitaet Leipzig*, 1999.
- [7] E. N. Lorenz. Deterministic non-periodic flow. *J. Atmos. Sci.* 20, 130-141, 1963.
- [8] E. N. Lorenz. A study of the predictability of a 28-variable atmospheric model. *Tellus* 17, 321-333, 1965.
- [9] W. Metz. Optimal relationship of large-scale flow patterns and the barotropic feedback due to high-frequency eddies. *J. Atmos. Sci.* 48, 1141-1159, 1991.
- [10] W. Metz. Singular modes and low-frequency atmospheric variability. *J. Atmos. Sci.* 51, 1740-1753, 1994.
- [11] F. Molteni and T. Palmer. Predictability and finite-time instability of the northern winter circulation. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 118, 269-298, 1993.
- [12] J. Oortwijn. Growth properties of optimal transition perturbations. *J. Atmos. Sci.* 56, 2491-2511, 1999.

- [13] F. Selten. An efficient description of the dynamics of barotropic flow. *J. Atmos. Sci.* 52, 915-936, 1995.
- [14] J. Wallace and D. Gutzler. Teleconnections in the geopotential height field during the northern hemisphere winter. *Mon. Wea. Rev.* 109, 784-812, 1981.

**Adresse der Autoren:**

Harald Heinrich, Werner Metz  
Universität Leipzig, Institut für Meteorologie  
Stephanstr. 3  
04103 Leipzig